ISSN : 1017-060X (Print)

ISSN : 1735-8515 (Online)

Special Issue of the

Bulletin of the

Iranian Mathematical Society

in Honor of Professor Freydoon Shahidi's 70th birthday

Vol. 43 (2017), No. 4, pp. 279–289

Title :

# Caractérisation des paramètres d'Arthur, une remarque

Author(s) :

C. Mœglin

Published by the Iranian Mathematical Society
http ://bims.ims.ir

Bull. Iranian Math. Soc.
Vol. 43 (2017), No. 4, pp. 279–289
Online ISSN : 1735-8515

# CARACTÉRISATION DES PARAMÈTRES D'ARTHUR, UNE REMARQUE

C. MŒGLIN

*En l'honneur de Freydoon Shahidi*

Résumé. In the endoscopic classification of representations, J. Arthur has proved the Langlands' classification for discrete series of p-adic classical groups. This uses endoscopy and twisted endoscopy. In this very short note, we remark that the normalization à la Langlands-Shahidi of the intertwining operators, allows to avoid endoscopy. This is based on the intertwining relation which is a very important point of this book.
**Keywords:** Langlands' classification, discrete series, classical $p$-adic groups, intertwining operators.
**MSC(2010):** Primary: 11F85; Secondary: 22E55.

## 1. Introduction

En [2], J. Arthur a prouvé les conjectures de Langlands pour la classification des représentations tempérées des groupes classiques p-adiques. Cette classification se fait de façon compatible à l'endoscopie et l'endoscopie tordue : avec l'endoscopie tordue, ce qui suppose que le groupe est quasi-déployé, J. Arthur définit les paquets de Langlands, ils sont uniquement associé à une représentation tempérée d'un bon groupe $GL(n)$ et les paquets sont donc classifiée par les morphismes de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans le $L$-groupe de $G$, o $G$ est le groupe classique p-adique qui nous intresse. Pour les groupes $SO(2n, F)$ la classification se fait canoniquement uniquement sous l'action de $O(2n, F)$. Ainsi que le groupe soit quasi déployé ou non, J. Arthur a associé à toute série discrète $\pi$ de $G(F)$ un morphisme $\psi$ de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$. En composant avec la représentation naturelle de ${}^LG$ dans $GL(n^*,\mathbb{C})$, on obtient une représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dont le déterminant est fixé par le groupe $G$. On renvoit aussi à [7] pour une démonstration légèrement différente qui n'est faite que dans le cas quasi-déployé.

Article electronically published on August 30, 2017.
Received : 5 January 2016, Accepted : 12 June 2016.

Fixons $\psi$ associé comme ci-dessus à une série discrète de $G(F)$ et on voit $\psi$ comme une représentation de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$. On décompose cette représentation en somme de sous-représentations irréductibles nécessairement de la forme $\psi_\rho \times r[a]$ où $\psi_\rho$ est une représentation irréductible de $W_F$ correspondant à une représentation cuspidale d'un groupe $GL(d_\rho, F)$ que l'on note $\rho$ et où $r[a]$ est la représentation irréductible de $SL(2,\mathbb{C})$ de dimension $a$. On note alors $Irr(\psi) := \{(\rho, a)\}$, où $\rho, a$ sont les couples qui interviennent dans la décomposition de $\psi$.

En [5, 8] on a donné une caractérisation de cette description à l'aide de la notion de bloc de Jordan : soit $\pi$ une représentation tempérée du groupe $G$ qui n'a pas besoin d'être quasi-déployé ; si $m$ est le rang de $G$ sur une clture algbrique $\overline{F}$ de $F$, on note parfois $G(m)$ au lieu de $G$. Sans mention explicite du contraire, $n$ est un entier fix. Soit $\rho$ une représentation cuspidale autoduale d'un groupe $GL(d_\rho, F)$ et soit $a$ un entier. On dit que $(\rho, a) \in Jord(\pi)$ si

. pour le groupe $G(n+ad_\rho)$ l'induite $St(\rho, a) \times \pi$ est irréductible (où $St(\rho, a)$ est la représentation de Steinberg de $GL(ad_\rho)$ basée sur $\rho$)

. pour tout $T$ grand l'induite pour le groupe $G(n + (a+T)d_\rho, F)$, l'induite $St(\rho, a+T) \times \pi$ est réductible.

On a finalement montré (cf. par exemple [7]) que $Jord(\pi) = Irr(\psi)$ si $\psi$ est le morphisme associé à $\pi$.

En utilisant l'endoscopie, J. Arthur a aussi associé à une représentation tempérée, $\pi$, un caractère du centralisateur de $\psi$ dans ${}^LG$, où $\psi$ est associé à $\pi$ comme précédemment. Dès [5, 8], on avait aussi construit une application (non partout définie) de $Jord(\pi)$ dans $\{\pm 1\}$ à l'aide des modules de Jacquet de $\pi$. Pour le moment excluons, le cas des groupes $G = SO(2n)$. Il n'est alors pas difficile d'identifier les caractères du centralisateur de $\psi$ dans ${}^LG$ avec les applications de $Jord(\pi)$ dans $\{\pm 1\}$. On a montré facilement que la restriction du caractère associé par J. Arthur à $\pi$ coïncide avec la définition que nous avions donnée sur le domaine de définition de notre application. On avait suggéré en [6]  la fin de 1.5, que la définition d'Arthur pouvait se lire sur des opérateurs d'entrelacement qu'il fallait commencer par normaliser correctement ce que nous n'avions pas fait. Mais ans [2, 2.3] J. Arthur a normalisé ces opérateurs, c'est indispensable pour ses propres constructions et rsultats. Et un corollaire facile de son résultat, comme nous allons le montrer, est la preuve de notre conjecture reformulée en tenant compte de la normalisatin de loc. cite.

Je remercie Alberto Minguez qui est en fait à l'origine de cet article m'ayant expliqué l'importance de la relation locale d'entrelacement démontrée par J. Arthur en [2, 2.4].

## 2. Le contexte

On rappelle ce dont on a besoin pour énoncer précisément le résultat. On fixe $\pi$ une série discrète de $G(F)$ et on note $\psi$ le morphisme de $W_F \times SL(2,\mathbb{C})$ dans ${}^LG$ qui lui est associé. On fixe aussi $(\rho, a) \in Jord(\pi)$. On considère pour le groupe $G(n+ad_\rho)$ l'induite $St(\rho,a)\times\pi$. Par définition elle est irréductible. N'importe quel opérateur d'entrelacement

$$St(\rho,a)|det|^s \times \pi \to St(\rho^*,a)|det|^s \times \pi$$

est scalaire en $s=0$ si on identifie $St(\rho,a)\times\pi$ à $St(\rho^*,a)\times\pi$ en utilisant le fait que $\rho \simeq \rho^*$. On veut évidemment que ce scalaire soit le signe associé à $(\rho,a)$ par le caractère associé à $\pi$.

On note $P$ le parabolique standard de $G(n+d_\rho a, F)$ dont le sous-groupe de Levi est isomorphe à $GL(d_\rho a, F)\times G(n)$ et on note $\overline{P}$ le parabolique opposé de $P$. On a alors l'opérateur d'entrelacement défini méromorphiquement :

$$M_{\overline{P}|P}(s): \qquad Ind_P^G St(\rho,a)|det|^s \times \pi \to Ind_{\overline{P}}^G St(\rho,a)|det|^s\times\pi.$$

On définit de façon analogue $M_{P|\overline{P}}(s)$ et le composé $M_{P|\overline{P}}(s)\circ M_{\overline{P}|P}(s)$ est un opérateur scalair dépendant méromorphiquement de $s$. A l'aide des fonctions $L$ et facteurs $\epsilon$ attachés à $\psi$, J. Arthur définit une fonction méromorphe de $s$, $r_{\overline{P}|P}(s)$ tel qu'en posant $N_{\overline{P}|P}(s) := r_{\overline{P}|P}(s)^{-1}M_{\overline{P}|P}(s)$ et $N_{P|\overline{P}}(s)$ de façon analogue, on ait :

$$N_{P|\overline{P}}(s)\circ N_{\overline{P}|P}(s) = 1.$$

Soit $M$ un sous-groupe de Levi de $P$ ; on définit alors le groupe de Weyl, $W(M)$. Pour $w\in W(M)$, J. Arthur fixe précisément un représentant $\tilde{w}$ dans $G(F)$ (cf. ce qui précède le [2, Lemme 2.3.4]). Vue la situation considérée on a deux choix pour $w$ ; si $w=1$, $\tilde{w}=1$ sinon $\tilde{w}$ conjugue $P$ et $\overline{P}$ et envoie donc par l'action naturelle$Ind_{\overline{P}}St(\rho,a)\otimes\pi$ dans $Ind_P\tilde{w}(St(\rho,a)\times\pi)$. J. Arthur modifie encore cet opérateur par un scalaire dépendant de $w$ et de $\psi$, l'opérateur est alors noté $\ell(w,\pi,\psi)$ et le composé $\ell(w,\pi,\psi)\circ N_{\overline{P}|P}(0)$ est un opérateur de $Ind_P^G St(\rho,a)\times\pi$ dans $Ind_P^G\tilde{w}(St(\rho,a)\otimes\pi)$.

Il faut encore identifier $St(\rho,a)\otimes\pi$ et $\tilde{w}(St(\rho,a)\otimes\pi)$. Pour connaître $\tilde{w}(St(\rho,a)\otimes\pi)$ il suffit de connaître $\tilde{w}$ modulo le centre de $M$ et pour cela n'importe quel représentant de $w$ qui fixe un épinglage de $M$ convient. Dans notre situation, il est alors facile de fixer un tel représentant sauf dans le cas de $SO(2n,F)$ avec $ad_\rho$ impair. En effet, on prend pour représentant la matrice par bloc

$$w' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_{ad_\rho} \\ 0 & (-1)^x Id & 0 \\ (-1)^y\, {}^tJ_{ad_\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $J_{ad_\rho}$ est la matricie antidiagonale, $ad_\rho\times ad_\rho$ avec des signes qui alternent, où $y=0$ si $G$ est un groupe orthogonal et 1 si $G$ est un groupe symplectique et où $x$ est tel que le déterminant de la matrice soit 1 ; c'est ici que l'on utilise l'hypothèse que si $G = SO(2n)$ alors $ad_\rho$ est pair. Ainsi

$$\tilde{w}(St(\rho, a) \otimes \pi) = (ad(J_{ad_\rho})St(\rho, a)) \otimes \pi \simeq St(\rho^*, a) \otimes \pi.$$

Et l'identification de cette représentation avec $St(\rho, a) \otimes \pi$ se fait en demandant que le modèle de Whittaker fixé partout dans [2] pour $St(\rho, a)$ soit respecté, on note $A_{wh}$ l'opérateur qui réalise cette identification.

Ainsi [2] construit un opérateur d'entrelacement sur $Ind_P(St(\rho, a) \times \pi)$ nécessairement scalaire. On peut démontrer a priori que le carré de cet opérateur est 1 et que le scalaire est donc un signe et ce signe est calculé par le [2, Théorème 2.4.1] (pour nous $s_\psi = 1$ car on est dans le cas tempéré) comme étant précisément la valeur du caractère associé à $\pi$ sur le bloc de Jordan $(\rho, a)$. Pour éviter de devoir faire tous les calculs qui précèdent, on peut en fait retrouver ce signe par la construction suivante.

On garde $w'$ défini ci-dessus ou plus généralement on fixe $w'$ un élément de $G(F)$ qui stabilise $M$, un épinglage de $M$ et qui envoie $P$ sur $\overline{P}$, et on modifie la construction précédente, en posant

$$N(w', \pi) := A_{wh} \circ ad(w') \circ N_{\overline{P}|P}(0).$$

Ceci défini un opérateur d'entrelacement nécessairement scalaire puisque la représentation est irréductible. On note $x(\pi)$ ce scalaire qui n'est pas un signe en général. On note $\pi_{wh}$ la représentation du paquet associé à $\psi$ qui a un modèle de Whittaker ; on a donc aussi, $x(\pi_{wh})$ ; la représentation $\pi_{wh}$ est la représentation associé au caractère trivial du centralisateur de $\psi$ dans $\hat{G}$.

**Proposition 2.1.** *Le caractère d'Arthur associé à $\pi$ vaut $x(\pi)/x(\pi_{wh})$.*

On a fait deux modifications par rapport à la construction de [2, 2.3 et 2.4]. D'une part, on a négligé un scalaire attaché à $\tilde{w}$ ; c'est le même pour $\pi$ et $\pi_{wh}$ donc on ne voit pas cette modification. Et on a pris $w'$ au lieu de prendre $\tilde{w}$. D'après les propriétés de $w'$ et de $\tilde{w}$, ces deux éléments diffèrent par un élément du centre de $M$. Le seul point à remarquer est donc que le caractère central de $St(\rho, a) \otimes \pi$ et de $St(\rho, a) \otimes \pi_{wh}$ sont les mêmes. Ceci a déjà été remarqué par Waldspurger qui en avait besoin pour les groupes orthogonaux pairs. L'argument est le suivant : soit $z$ dans le centre de $G(F)$. La somme des représentations dans un paquet de Langlands définie une distribution stable. Quand on traduit cela en termes de pseudo-coefficients, cela veut dire que la somme des pseudo-coefficients est une fonction cuspidale stable. On transforme cette fonction en la translatant par $z$, elle reste stable et elle correspond à la somme des représentations du paquet pondéré par la valeur du caractère central de la représentation en $z$. Comme il n'y a, à un scalaire près, qu'une combinaison linéaire des représentations dans un paquet de Langlands qui est stable, le caractère central prend la même valeur en $z$ pour toute représentation du paquet, d'où le résultat.

Maintenant on peut appliquer [2, 2.4.1] de la façon suivante : on a fixe $(\rho, a)$ ; à un tel couple, on associe naturellement un élément du centralisateur de $\psi$ dans $\hat{G}$ noté $s_{\rho,a}$ et on cherche à calculer $\chi_\pi(s_{\rho,a})$. On considère le groupe, $G_+$ de même type que $G$ mais de rang $ad_\rho$ de plus et le morphisme pour ce groupe qui se déduit de $\psi$ en ajoutant deux fois la représentation $\rho \otimes r[a]$ de $W_F \times SL(2, \mathbb{C})$. Notre $\psi_+$ joue le rôle du $\psi$ de [2, 2.4.1] et il faut remarquer que comme l'endoscopie commute à l'induction, le caractère pour les représentations tempérées associées à $\psi_+$ se déduise totalement naturellement du caractère pour les séries discrètes associées à $\pi$ et en particulier si $\pi$ est une série discrète associé à $\psi$ alors

$$\chi_\pi(s_{\rho,a}) = \chi_{Ind(St(\rho,a)\otimes\pi)}(s_{\rho,a})$$

ce serait vrai pour tout élément du centralisateur de $\psi$ dans $\hat{G}$. Dans [2, 2.4.1], il y a un élément $u$ : cet élément est dans le centralisateur de $\psi_+$ et ici c'est l'analogue de $w'$. Dans loc.cite, il y a un $\tilde{u}$ et $\tilde{\pi}$ mais comme on l'a expliqué, ici on peut prendre $\tilde{\pi} = St(\rho, a) \otimes \pi$ (il n'y a pas d'extension à faire) et le facteur $\langle \tilde{u}, \tilde{\pi} \rangle = 1$. Il y a aussi un élément $s$ qui s'envoie dans le groupe des composantes centralisateur de $\psi_+$ dans $\hat{G_+}$ sur l'image de $w'$ ; on remarque que cette image est aussi celle de $s_{\rho,a}$. Ainsi le membre de gauche de (2.4.7) de [2] est une somme sur les représentations $Ind(St(\rho, a) \otimes \pi)$, où $\pi$ parcourt l'ensemble des séries discrètes associées à $\psi$ avec comme coefficient précisément $\chi_{Ind(St(\rho,a)\otimes\pi)}(s_{\rho,a})$. Le terme de droite de cette égalité est une somme sur le même ensemble mais avec comme coefficient le signe de l'opérateur d'entrelacement normalisé dans [2]. On peut alors appliquer ce qui précède pour conclure.

2.1. **Le cas de SO(2n).** Dans le cas de $SO(2n, F)$, on a laissé le cas où $ad_\rho$ est impair (cf. 2). On va traiter aussi ce cas, en rappelant d'abord comment [2] permet de donner de nombreux renseignements sur les représentations de ce groupe $SO(2n, F)$.

2.1.1. **Un rappel sur l'action de $O(2n, F)$.** D'abord on rappelle le résultat suivant : soit $\psi$ un morphisme discret de $W_{\mathbb{F}} \times SL(2, \mathbb{C})$ dans $SO(2, \mathbb{C})$ comme précédemment, on a alors la dichotomie

**Proposition 2.2.** *Si la représentation définie par $\psi$ contient une sous-reprsent-ation irréductible de dimension impaire, alors toute série discrète associée à $\psi$ est invariante sous l'action de $O(2n, F)$. A l'inverse si toutes les sous-reprsentations irrductibles incluses dans $\psi$ sont de dimension paire, alors toute série discrète associée à $\psi$ n'est pas invariante sous l'action de $O(2n, F)$.*

La démonstration de ce résultat consiste à utiliser en suivant [2] et l'endoscopie ordinaire et l'endoscopie pour l'espace tordu des éléments de déterminant $-1$ de $O(2n, F)$.

On considère d'abord l'endoscopie ordinaire : une donnée endoscopique elliptique est la donnée d'un produit de deux groupes spéciaux orthogonaux pairs quasi-déployé, chacun est donc associé à un caractère quadratique et le produit des caractères quadratiques est celui associé au groupe de départ. De plus, il y a des automorphismes entre ces données, l'échange des deux facteurs et l'action du produit des éléments non triviaux de chaque groupe orthogonal quand le produit a vraiment deux facteurs. De plus, on a montré en [7] que l'endoscopie est compatible à ce que l'on a appelé le support cuspidal étendu ; en termes simples, une donnée endoscopique elliptique comme ci-dessus et un caractère stable formé de séries discrètes associé à un morphisme $\psi'$ pour cette donnée, contribue par transfert à une distribution formé de caractère de séries discrètes dont l'une au moins est associée à $\psi$ si et seulement si toutes le sont et si et seulement si $\psi'$ est conjugué de $\psi$. On sait aussi que l'espace des distributions stables associé à un morphisme $\psi$ et invariante sous l'action du groupe orthogonal est de dimension un exactement. On va appliquer ce résultat pour les groupes endoscopiques ainsi que la proposition par récurrence pour ces groupes quand ils sont produits de deux facteurs non triviaux.

Distinguons les cas. On suppose d'abord que $\psi$ contient une sous-représentation irréductible de dimension impaire. Soit $H, \psi'$ une donnée endoscopique elliptique de groupe $H$ (produit de groupes orthogonaux) et un morphisme conjugué de $\psi$ à valeurs dans le $L$-groupe de $H$. On suppose que $H$ est un produit de deux groupes non triviaux et on écrit $\psi' = \psi_1 \times \psi_2$. L'un au moins des deux facteurs (et par symétrie on peut considérer que c'est $\psi_1$) contient une sous-représentation irréductible de dimension impaire. Alors l'espace des distributions stables associées à $\psi'$ et invariantes sous l'automorphisme non trivial de la donnée provenant de l'action des groupes orthogonaux est de dimension un. Décomposons $Jord(\psi)$ en $Jord(\psi)_{imp} \cup Jord(\psi)_{pair}$ où le premier ensemble contient les sous-représentations irréductibles de dimension impaire. Alors le cardinal de $Jord(\psi)_{imp}$ est pair et le nombre de décomposition $\psi_1 \times \psi_2$ (à permutation près) est alors

$$2^{|Jord_{pair}|} 2^{|Jord(\psi)_{imp}|-2}$$

(il faut que la dimension de $\psi_1$ soit pair) en incluant le cas où $\psi_2$ est trivial.

Ainsi la partie provenant par endoscopie des distributions associées à $\psi$ est de dimension $2^{|Jord(\psi)|-2} - 1$. Et la dimension de l'espace des distributions associées à $\psi$ et invariante sous l'action de $O(2n, F)$ est au plus de dimension $2^{|Jord(\psi)|-2}$.

On utilise ensuite l'endoscopie pour l'espace tordu des éléments de déterminant $-1$ de $O(2n, F)$, sans hypothèse sur $\psi$. Cette endoscopie permet de compter le nombre de représentations irréductibles associées à $\psi$ invariante sous $O(2n, F)$ ; c'est exactement le nombre de couples formés d'une donnée endoscopiques elliptiques pour cet espace tordu et d'un morphisme $\psi'$, conjugué de $\psi$ et à valeur dans le $L$-groupe de la donnée. Ces données endoscopiques sont d'un couple de groupes spéciaux orthogonaux impairs avec un couple de caractères quadratiques. On doit donc aussi calculer le nombre de décomposition

$\psi = \psi_1 \times \psi_2$ mais où ici la dimension de $\psi_1$ est impair. On calcule encore à permutation près des deux facteurs. Il y en a donc $2^{|Jord(\psi)|-2}$ si $\psi$ contient au moins une sous-représentation irréductible de dimension impaire et l'ensemble est vide sinon. Dans le premier cas, on trouve exactement le même nombre de distribution qu'avec l'endoscopie ordinaire, ce qui veut dire que les distributions stables sous $O(2n, F)$ combinaison linéaire de séries discrètes associées à $\psi$ est engendré par les caractères des séries discrètes irréductibles associées à $\psi$ invariante sous $O(2n, F)$. Et cela prouve la première assertion de la proposition car une série discrète irréductible associée à $\psi$ non invariante sous $O(2n, F)$ fournirait avec sa conjuguée sous $O(2n, F)$ une distribution invariante sous $O(2n, F)$ qui n'existe pas d'après ce qui précède. Ici on trouve donc $2^{|Jord(\psi)|-2}$ séries discrètes irréductibles de $SO(2n, F)$ associées à $\psi$ et elles donnent donc lieu à $2^{|Jord(\psi)|-1}$ séries discrètes irréductibles de $O(2n, F)$ dont la restriction à $SO(2n, F)$ est associée à $\psi$.

Supposons maintenant que toutes les sous-représentations incluses dans $\psi$ sont de dimension paire. On vient de voir qu'aucune série discrète irréductible associée à $\psi$ n'est invariante sous $O(2n, F)$ puisque l'endocopie tordue pour $O(2n, F)$ ne contribue pas. En reprenant le calcul fait pour l'enscopie ordinaire, on voit que l'espace des distributions engendrées par les caractères des séries discrètes irréductibles associée à $\psi$ est invariante sous $O(2n, F)$ est maintenant $2^{|Jord(\psi)|-1}$. Par contre il y a $2^{|Jord(\psi)|}$ séries discrètes de $SO(2n, F)$ associée à $\psi$. Il faut évidemment tenir compte du fait que l'on a regroupé ensemble deux $L$-paquets, donc chaque $L$-paquet à $2^{|Jord(\psi)|-1}$ éléments.

2.1.2. **Le résultat pour les groupes $SO(2n, F)$.** Ici on suppose donc que $ad_\rho$ est impair avec les notations de 2. L'élément $w'$ que l'on a écrit dans ce paragraphe est un élément de $O(2n + 2ad_\rho, F)$ qui n'est pas de déterminant 1 quelque soit la valeur de $x$ et de $y$. En plus des choix faits précédemment, il faut donc aussi choisir un élément de $O(2n, F)$, noté $x_0$ de façon à pouvoir considérer l'action de $w'x_0$ au lieu de $w'$. Pour $x_0$, on prend l'élément de $O(2n, F)$ qui stabilise l'épinglage fixé. On sait que $\pi \simeq ad(x_0)\pi$ d'après 2.1.1 mais il faut fixer cet isomorphisme de façon compatible à toutes les séries discrètes associées à $\psi$.

Comme expliqué en [2, 2.4.4], pour pouvoir faire cela, il faut étendre la paramétrisation des séries discrètes de $SO(2n, F)$ de caractère associé $\psi$ en une paramétrisation des séries discrètes de $O(2n, F)$ dont la restriction à $SO(2n, F)$ est de caractère associé $\psi$. On a vu en 2.1.1, qu'il y a exactement $2^{|Jord(\psi)|-1}$ telles représentations ce qui est exactement le cardinal du groupe des caractères du centralisateur de $\psi$ dans $O(2n, \mathbb{C})$ dont la restriction au centre de $O(2n, \mathbb{C})$ donne exactement l'invariant de Hasse de la forme orthogonale.

Le contenu du [2, Théorème 2.4.4], dit qu'une telle paramétrisation est uniquement déterminée par les relations de transfert pour l'endoscopie tordue venant de la composante non neutre de $O(2n, F)$. C'est cette paramétrisation qui peut aussi se caractériser avec les opérateurs d'entrelacement. On va dans le paragraphe suivant donner un exemple.

2.1.3. **Le cas des représentations de Steinberg.** Ici on fixe $V$ un espace orthogonal de discriminant trivial. Il y a alors en général deux possibilités pour $V$ : le noyau anisotrope de $V$ est de dimension 0 ou 4. On considère le paramètre $\psi$ qui correspond à l'orbite unipotente régulière pour la représentation de $SL(2,\mathbb{C})$ et qui est trivial sur $W_F$. Le centralisateur de $\psi$ dans $O(2n,\mathbb{C})$ est le produit $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ et il y a deux caractères de ce groupe quand on a fixé l'invariant de Hasse dont la restriction au centre de $O(2n,\mathbb{C})$ est trivial si l'invariant de Hasse est trivial et non trivial sinon. On va spécialiser au cas où l'invariant de Hasse est trivial c'est-à-dire ou $V$ est déployé. Pour $SO(V)$ il n' y a qu'une représentation associé à $\psi$, il s'agit de la représentation de Steinberg, c'est la duale au sens de l'involution d'Iwahori-Matsumoto de la représentation trivial. Par contre pour le groupe orthogonal, il y a deux représentations. On les distingue de la façon suivante : pour $O(2,F)$, il y a la représentation trivial et la représentation signe et pour $O(V,F)$ on distingue les représentations à l'aide du module de Jacquet ; ce module de Jacquet contient le caractère :

$$\otimes_{i\in[dim\, V/2,2]}|\,|^{i-1}\otimes\sigma$$

où $\sigma$ est soit le caractère trivial de $O(2,F)$ soit le caractère signe. On appelle la première représentation, la représentation de Steinberg et la deuxième s'obtient en tensorisant par le signe.

On note $O(V)_-$ la composante non neutre de $O(V,F)$ et on considère l'endoscopie tordue pour ce groupe. On remarque que la trace de la représentation de Steinberg restreinte à $O(V)_-$ est exactement l'opposé de la restriction de l'autre représentation au même espace. On veut évidemment associé le caractère trivial à la représentation de Steinberg et le caractère non trivial sur chaque copie de $\{\pm 1\}$ à l'autre représentation. Le produit du caractère avec la trace restreinte à $O(V)_-$ est bien indépendant du choix fait. Le théroème de [2] dit que cette distribution est obtenue comme transfert pour l'endoscopie tordue et la seule donnée par laquelle le morphisme $\psi$ se factorise. Il s'agit de la donnée, dont le groupe est $Sp(dim\, V,F)$ et le caractère du groupe de Galois est trivial.

Par les considérations générales de [7], on sait que ceci est vérifié à un scalaire près et on va calculer ce scalaire. Comme le transfert est compatible au module de Jacquet, il suffit de le faire quand $dim\, V=2$. Ici $O(V,F)_-$ n'est autre que $F^*$ tordu par l'automorphisme inversion. Ici le groupe endoscopique devient trivial, on le note quand même $H$ et l'égalité de transfert des intégrales orbitale dit que pour tout $f\in C_c^\infty(O(V,F)_-)$, le transfert $f^H$ vérifie :

$$f^H(1)=\sum_{\eta\in F^*/F^2} I^{O(V)}(\eta,f).$$

C'est à dire que $f^H(1) = \int_{O(V)_-} f(g)\, dg$ pour les bonnes mesures et ce n'est autre que la trace de la représentation triviale restreinte à $O(V)_-$. Ainsi le scalaire vaut 1.

On a fait ce calcul trivial, car la démonstration du [2, Théorème 2.4.4] utilise le résultat de Mezo sur le calcul du transfert tordu aux places archimédiennes ; mais ce calcul a laissé un facteur de transfert spectral non calculé. On a expliqué en [1] comment quand on connait la situation pour les représentations de Steinberg, on peut montré que ce facteur de transfert spectral vaut 1 comme utilisé dans [2].

Pour faire un calcul un peu moins trivial, on pourrait regarder la torsion de la représentation de Steinberg par un caractère quadratique $\chi$ ; cela revient à considérer le produit tensoriel de $\psi$ avec le caractère $\chi$ de $W_F$. Ici, la donnée endoscopique qui factorise $\chi \otimes \psi$ a pour groupe $Sp(dim\, V, F)$ mais le caractère du groupe de Galois de $F$ est le caractère $\chi$. Quand on regarde encore le cas où $dim\, V = 2$, l'égalité de transfert géométrique est alors

$$f^{H,\chi}(1) = \sum_{\eta \in F^*/F^2} \chi(\eta) I^{O(V)}(\eta, f).$$

On définit un caractère $\chi$ de $O(V)$ en posant $\chi(g\theta) = \chi(g)$ pour tout $g \in SO(V, F)$ et où $\theta$ est l'inversion. Et le terme de droite est alors la trace de ce caractère restreint à $O(V)_-$. D'où encore l'égalité de transfert spectrale.

2.1.4. **La proposition pour $O(V)$.** On a expliqué dans les paragraphes précédents que la paramétrisation de [2] est canonique pour $O(2n, F)$ et dès que l'on a une représentation de $O(2n, F)$ et non pas de $SO(2n, F)$, $x_0$ défini ci-dessus en 2.1.2 opére dans l'espace de la représentation et il n'y a plus de choix à faire.

On définit alors comme pour les autres groupes classiques, $x_\pi$ un caractère du centralisateur de $\psi$ dans $O(2n, \mathbb{C})$, pour toute représentation $\pi$ de $O(2n, F)$ dont la restriction à $SO(2n, F)$ est une série discrète irréductible associée à $\psi$.

**Proposition 2.3.** *Le caractère d'Arthur associé à $\pi$ vaut $x(\pi)/x(\pi_{wh})$.*

C'est encore 2.4.1 de [2] qui donne le résultat mais ici il faut comprendre le facteur $\langle \tilde{u}, \tilde{\pi} \rangle$ de [2, (2.4.4)] qui intervient dans (2.4.7) : on fixe une sous-représentation irréductible de $\psi$, $\rho \otimes r[a]$ tel que $ad_\rho$ soit impair. On considère le groupe $SO(2n + 2ad_\rho, F)$ de même type que le groupe $SO(2n, F)$ que l'on a fixé et on considère son sous-groupe de Levi, $M$, isomorphe à $GL(ad_\rho, F) \times SO(2n, F)$. Pour ce plus gros groupe, on a le paramètre

$$\psi_+ := \psi \oplus \rho \otimes r[a] \oplus \rho \otimes r[a].$$

Dans le centralisateur de $\psi_+$ dans $SO(2n+2ad_\rho,\mathbb{C})$, on considère l'élément $wy_0$ où $w$ est l'analogue du $w'$ déjà défini, c'est-à-dire ici

$$w := \begin{pmatrix} 0 & 0 & J_{ad_\rho} \\ 0 & Id & 0 \\ {}^tJ_{ad_\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et $y_0$ est l'élément l'élément non trivial du centralisateur de $\psi$ dans $SO(2n,\mathbb{C})$ qui est l'élément du centre de $O(ad_\rho,\mathbb{C})$. Ici $wy_0$ est l'élément $u$ de [2] (ce qui suit (2.4.3)). A cet élément $u$, [2] associe un élément du groupe de Weyl de $SO(2n+2ad_\rho,F)$ qui stabilise un épinglage mais qui n'est pas nécessairement le même que l'élément que nous avons fixé ; encore une fois les choix ne peuvent différer que par un élément du centre de $SO(2n+2ad_\rho,F)$. Il faut encore calculer $x_u$, c'est-à-dire l'image de $wy_0$ dans le groupe des composantes du centralisateur de $\psi_+$. Comme on a rajouté $y_0$ cette image est triviale : on peut voir cet élément comme un élément de $O(3,\mathbb{C})$ (trois étant la multiplicité de la représentation $\rho\otimes r[a]$ dans $\psi_+$) et c'est alors la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -Id & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et cet élément est dans $SO(3,\mathbb{C})$. On applique alors [2, 2.4.1] : $s_\psi = 1$ car on est dans le cas tempéré, $s=1$ car $x_u=1$ ainsi le terme de gauche est la somme sur l'ensemble des représentations associées à $\psi_+$. Ces représentations sont exactement les induites $\mathcal{I}_P(\pi')$ où $\pi'$ parcourt l'ensemble $St(\rho,a)\otimes\pi$ pour $\pi$ parcourant l'ensemble des représentations associées à $\psi$. Dans le terme de droite de loc.cite, on a une somme sur les mêmes induites mais avec des coefficients qui doivent donc être égaux à 1. Cela force la valeur de l'opérateur d'entrelacement multiplicé par le caracètre associé à l'extension de $\pi$ à $O(2n,F)$ que l'on a fixée pour définir l'opérateur d'entrelacement. Ensuite on termine la preuve comme dans le cas des autres groupes.

## Références

[1] N. Arancibia, C. Mœglin, D. Renard, Paquets d'Arthur des groupes classiques et unitaires, Arxiv :1507.01432 [math.RT].

[2] J. Arthur, The Endoscopic Classification of Representations, Orthogonal and Symplectic Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 61, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2013. 590 pages.

[3] R. Ganapathi and S. Varma, On the local Langlands correspondance for classical groups over local function fields, *J. Inst. Math. Jussieu*, published on line (2015).

[4] P. Mezo, Tempered spectral transfer in the twisted endoscopy of real groups, preprint, http://people.math.carleton.ca/~mezo/research.html

[5] C. Mœglin, Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques $p$-adiques ; paramètre de Langlands et exhaustivité, *J. Eur. Math. Soc.* **4** (2002) 143–200.

[6] C. Mœglin, Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur aux places p-adiques, in : On Certain $L$-Functions, Conference in honor of F. Shahidi, pp. 333–374, Clay Math. Proc. 13, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2011.

[7] C. Mœglin, Paquets stables des sries discrtes accessibles par endoscopie tordue ; leur paramtre de Langlands, in : J.W. Cogdell, F. Shahidi and D. Soudry (eds.), Automorphic Forms and Related Geometry : Assessing the Legacy of I.I. Piatetski-Shapiro, pp. 295–336, Contemp. Math. 614, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2014.

[8] C. Mœglin and M. Tadić, Construction of discrete series for classical p-adic groups, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002) 715–786.

[9] F. Shahidi, Local coefficients and intertwining operators for $GL(n)$, *Compos. Math.* **48** (1983) 271–295.

[10] F. Shahidi, On the Ramanujan conjecture and finiteness of poles for certain $L$-functions, *Ann. of Math.* **127** (1988) 547–584.

[11] F. Shahidi, A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures ; complementary series for p-adic groups, *Ann. of Math.* **132** (1990) 273–330.

(Colette Mœglin)
*E-mail address* : `colette.moeglin@imj-prg.fr`